16. (5)

Lehrsatz. Sind α und β zwei beliebige Functionen von x, y, für welche das Integral

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$

durch alle Theile der beliebig über A ausgebreiteten Fläche T ausgedehnt einen endlichen Werth hat, so erhält das Integral bei Aenderung von α um stetige oder doch nur in einzelnen Punkten unstetige Functionen, die am Rande $=0$ sind, immer für eine dieser Functionen einen Minimumwerth und, wenn man durch Abänderung in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeiten ausschliesst, nur für Eine.

Wir bezeichnen durch λ eine unbestimmte stetige oder doch nur in einzelnen Punkten unstetige Function, welche am Rande $=0$ ist und für welche das Integral

$$L=\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

über die ganze Fläche ausgedehnt einen endlichen Werth erhält, durch ω eine unbestimmte der Functionen $\alpha+\lambda$, endlich das (über die ganze Fläche erstreckte) Integral

Definition

the set of all λ satisfying the above

$$\Omega=\int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT \longrightarrow \text{all } \lambda \text{ set}$$

durch Ω. Die Gesammtheit der Functionen λ bildet ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Gebiet, indem jede dieser Functionen stetig in jede andere übergehen, sich aber nicht einer (längs einer Linie) unstetigen unendlich annähern kann, ohne dass L unendlich wird (Art. 17); für jedes λ erhält nun, $\omega=\alpha+\lambda$ gesetzt, Ω einen endlichen Werth, der mit L zugleich unendlich wird, sich mit der Gestalt von λ stetig ändert, aber nie unter Null herabsinken kann; folglich hat Ω wenigstens für Eine Gestalt der Function ω ein Minimum.

einer Unstetigkeit

Um den zweiten Theil unseres Satzes zu beweisen, sei u eine der Functionen ω, welche Ω einen Minimumwerth ertheilt, h eine unbestimmte (in der ganzen Fläche constante) Grösse, so dass $u+h\lambda$ den der Function ω vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Der Werth von Ω für $\omega=u+h\lambda$, welcher

Constant

이것이 가능한가.

$$=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$$
$$+2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT$$
$$+h^2\int\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right)dT=M+2Nh+Lh^2 \text{ wird,}$$