diese beiden Eigenschaften besitzen und daher allenthalben, wo sie nicht unendlich werden, eine Integration zulassen, wie sich auch leicht direct zeigen lässt. (3)

Um jetzt den Fall, wo die zu integrirende Function $f(x)$ für einen einzelnen Werth unendlich gross wird, näher in Betracht zu ziehen, nehmen wir an, dass dies für $x = 0$ stattfinde, so dass bei abnehmendem positiven x ihr Werth zuletzt über jede gegebene Grenze wächst.

Es lässt sich dann leicht zeigen, dass $xf(x)$ bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze a an, nicht fortwährend grösser als eine endliche Grösse c bleiben könne. Denn dann wäre

$$\int_x^a f(x)\,dx > c\int_x^a \frac{dx}{x},$$

also grösser als $c\left(\log\frac{1}{x} - \log\frac{1}{a}\right)$, welche Grösse mit abnehmendem x zuletzt in's Unendliche wächst. Es muss also $xf(x)$, wenn diese Function nicht in der Nähe von $x = 0$ unendlich viele Maxima und Minima hat, nothwendig mit x unendlich klein werden, damit $f(x)$ einer Integration fähig sein könne. Wenn andererseits

$$f(x)\,x^\alpha = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{d\,(x^{1-\alpha})}$$

bei einem Werth von $\alpha < 1$ mit x unendlich klein wird, so ist klar, dass das Integral bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergirt.

Ebenso findet man, dass im Falle der Convergenz des Integrals die Functionen

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},\; f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\log\frac{1}{x}}\cdots,$$

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\,\log^n\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log^{1+n}\frac{1}{x}}$$

nicht bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze an fortwährend grösser als eine endliche Grösse bleiben können, und also, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, mit x unendlich klein werden müssen; dass dagegen das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire, sobald

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\left(\log^n\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{-d\left(\log^n\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ mit x unendlich klein wird.