hängende Fläche, welche durch einen Querschnitt aus A entstände, gegen die Voraussetzung.

Lehrsatz II. Wenn eine Fläche T durch n_1*) Querschnitte q_1 in ein System T_1 von m_1 einfach zusammenhängenden Flächenstücken und durch n_2 Querschnitte q_2 in ein System T_2 von m_2 Flächenstücken zerfällt, so kann $n_2 - m_2$ nicht $> n_1 - m_1$ sein.

Jede Linie q_2 bildet, wenn sie nicht ganz in das Querschnittsystem q_1 fällt, zugleich einen oder mehrere Querschnitte q_2' der Fläche T_1. Als Endpunkte der Querschnitte q_2' sind anzusehen:

1) die $2n_2$ Endpunkte der Querschnitte q_2, ausgenommen, wenn ihre Enden mit einem Theil des Liniensystems q_1 zusammenfallen,
2) jeder mittlere Punkt eines Querschnitts q_2, in welchem er in einen mittlern Punkt einer Linie q_1 eintritt, ausgenommen, wenn er sich schon in einer andern Linie q_1 befindet, d. h. wenn ein Ende eines Querschnitts q_1 mit ihm zusammenfällt.

Bezeichnet nun μ, wie oft Linien beider Systeme während ihres Laufes zusammentreffen oder auseinandergehen (wo also ein einzelner gemeinsamer Punkt doppelt zu rechnen ist), ν_1, wie oft ein Endstück der q_1 mit einem mittlern Stücke der q_2, ν_2, wie oft ein Endstück der q_2 mit einem mittlern Stücke der q_1, endlich ν_3, wie oft ein Endstück der q_1 mit einem Endstücke der q_2 zusammenfällt, so liefert Nr. 1 $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$, Nr. 2 $\mu - \nu_1$ Endpunkte der Querschnitte q_2'; beide Fälle zusammengenommen aber umfassen sämmtliche Endpunkte und jeden nur einmal, und die Anzahl dieser Querschnitte ist daher

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s.$$

Durch ganz ähnliche Schlüsse ergiebt sich die Anzahl der Querschnitte q_1' der Fläche T_2, welche durch die Linien q_1 gebildet werden,

$$= \frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2},$$

also $= n_1 + s$. Die Fläche T_1 wird nun offenbar durch die $n_2 + s$ Querschnitte q_2' in dieselbe Fläche verwandelt, in welche T_2 durch die $n_1 + s$ Querschnitte q_1' zerfällt wird. Es besteht aber T_1 aus m_1 einfach zusammenhängenden Stücken und zerfällt daher nach Satz I durch $n_2 + s$ Querschnitte in $m_1 + n_2 + s$ Flächenstücke; folglich müsste, wäre $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$, die Zahl der Flächenstücke T_2 durch $n_1 + s$ Querschnitte um mehr als $n_1 + s$ vermehrt werden, was ungereimt ist.

*) Unter einer Zerlegung durch mehrere Querschnitte ist stets eine successive zu verstehen, d. h. eine solche, wo die durch einen Querschnitt entstandene Fläche durch einen neuen Querschnitt weiter zerlegt wird.