

Werth erhalten; sie hat also keinen Grenzwert, und $\int_a^b f(x) dx$ würde nach dem Obigen keine Bedeutung haben. Wenn aber alsdann

$$\int_a^{c-\alpha_1} f(x) dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x) dx$$

sich, wenn α_1 und α_2 unendlich klein werden, einer festen Grenze nähert, so versteht man unter $\int_a^b f(x) dx$ diesen Grenzwert.

Andere Festsetzungen von Cauchy über den Begriff des bestimmten Integrals in den Fällen, wo es dem Grundbegriffe nach ein solches nicht giebt, mögen für einzelne Klassen von Untersuchungen zweckmässig sein; sie sind indess nicht allgemein eingeführt und dazu, schon wegen ihrer grossen Willkürlichkeit, wohl kaum geeignet.

한정된 5. 거의 0에 가까워진다.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Wir betrachten zunächst den Integralbegriff im engeren Sinne, d. h. wir setzen voraus, dass die Summe S , wenn sämtliche δ unendlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1 , d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1 , zwischen x_1 und x_2 durch D_2 , ..., zwischen x_{n-1} und b durch D_n , so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n \rightarrow 0 \text{ as } \delta \rightarrow 0$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an, dass, so lange sämmtliche δ kleiner als d bleiben, der grösste Werth, den diese Summe erhalten kann, Δ sei; Δ wird alsdann eine Function von d sein, welche mit d immer abnimmt und mit dieser Grösse unendlich klein wird. Ist nun die Gesamtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen grösser als σ sind, $= s$, so wird der Beitrag dieser Intervalle zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$ offenbar $\geq \sigma s$. Man hat daher

$$\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n \leq \Delta, \text{ folglich } s \leq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ kann nun, wenn σ gegeben ist, immer durch geeignete Wahl von

$$\max D_i \leq \sigma$$

$$\max D_i \geq \sigma$$

d beliebig klein ergibt sich also

Damit die S convergirt, ist erforderlich, dass die Schwankungen D_i beliebig klein werden.

Dieser Satz

Wenn die $f(x)$ Abnehmen sämmtlich in welchen die $f(x)$ gegebene Grösse a girt die Summe

Denn diejenigen sind, liefern zu kleiner als s , zwischen a und einen Beitrag $< \epsilon$ klein annehmen so bestimmen, $\delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n$ der Werth der werden kann.

Wir haben hinreichend sind Grössen δ convergirt der Function $f(x)$

Wird nun damit die Integration gefundenen Bedingungen der Bedingung, Bedingung, dass einzelne Wert Grenzwert ergiebt unendlich genähert

Nachdem wir Integrals im Allgemeinen die Natur der diese Untersuchungen

RIEMANN'S GESAMT